

8. РАЗРЕД

Рјешења задатака:

1. **Ријешит једначину:** $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{4x^2 + 12x + 9} = -1$

Рјешење:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{4x^2 + 12x + 9} = -1$$

$$\sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(2x+3)^2} = -1$$

$$|x-2| - |2x+3| = -1$$

(5 бодова)

Тачно одређени интервали рјешавања једначине: $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$, $x \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right)$ и $x \in [2, +\infty)$.

(5 бодова)

1) $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ рјешење је $x = -6$

(3 бода)

2) $x \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right)$ рјешење је $x = 0$

(3 бода)

3) $x \in [2, +\infty)$ $x = -4$ није рјешење

(3 бода)

Скуп рјешења је $\mathcal{R} = \{-6, 0\}$

(1 бод)

2. **Дато је 2015 произвољних природних бројева. Доказати да се међу њима могу изабрати два броја чија је разлика дјелива са 2014.**

Рјешење:

Подијелимо те бројеве у групе тако да истој групи припадају бројеви који при дијелењу са 2014 дају остатке 0, 1, 2, 3, ..., 2012, 2013. Како ових група има 2014, а бројева 2015 то према Дирихлеовом принципу бар 2 броја морају припадати истој групи, то јест при дијелењу са 2014 дају исти остатак, а то значи да им је разлика дјелива са 2014.

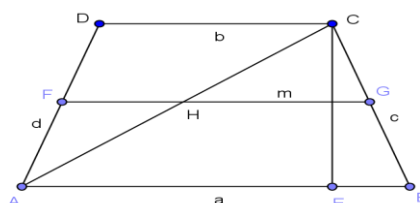
(20 бодова)

3. **Израчунај углове и обим једнакокраног трапеца ако је крак 6 cm, дијагонала дијели средњу линију на одсјечке 4 cm и 7 cm и краћа основица је два пута дужа од једног одсјечка средње линије.**

Рјешење:

Средња линија трапеца је $m = \frac{a+b}{2}$

па како је $m = 11$ cm, добијамо да је $a + b = 22$ cm.



Како је трапез једнакокраки то је $c = d$, па је

обим трапеза $O = a + b + 2c = 34 \text{ cm}$. (5 бодова)

Из услова да је краћа основица два пута дужа од једног одсјечка средње линије имамо да је $b = 8 \text{ cm}$ и $a = 14 \text{ cm}$. (5 бодова)

Дуж $EV = \frac{a-b}{2} = 3 \text{ cm}$. Дуж CE је висина трапеза па је троугао EVC правоугли и

једнак „половини“ једнакостраничног троугла чија је страница 6 cm . На основу тога су углови на дужој основици а по 60° , а на краћој основици по 120° .

(10 бодова)

4. Ако је $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$, израчунај вриједност израза $x^{2015} + (y - 2)^{2015}$.

Рјешење:

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 0$$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 0 \quad (10 \text{ бодова})$$

Из ове једначине добијамо рјешења: $x = -1$ и $y = 3$. (5 бодова)

$$(-1)^{2015} + (3 - 2)^{2015} = -1 + 1 = 0. \quad (5 \text{ бодова})$$

5. Мајка је родила кћерку са 26 година. Са колико је година родила сина ако он данас има 8 година, а сви заједно данас имају 60 година?

Рјешење:

Означимо са x број година кћерке, тада имамо једначину $26 + x + x + 8 = 60$. Из ове једначине добијемо да је $x = 13$, то јест да кћерка има 13 година. Како се кћерка родила 5 година прије сина то значи да је мајка родила сина у 31. години. (20 бодова)

9. РАЗРЕД

Рјешења задатака:

1. Ријешити неједначину: $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} < 3 - x$

Рјешење:

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} < 3 - x$$

$$\sqrt{(2x - 1)^2} < 3 - x$$

$$|2x - 1| < 3 - x$$

(5 бодова)

Ова неједначина има два случаја:

а) За $x \geq \frac{1}{2}$ имамо неједначину $2x - 1 < 3 - x$ чији је скуп рјешења $x < \frac{4}{3}$ па је

рјешење овог случаја $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$. (5 бодова)

б) За $x < \frac{1}{2}$ имамо неједначину $-2x + 1 < 3 - x$ чији је скуп рјешења $x > -2$ па

је рјешење овог случаја $x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right)$. (5 бодова)

Коначно рјешење неједначине $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} < 3 - x$ је скуп $x \in \left(-2, \frac{4}{3}\right)$.

(5 бодова)

2. Којом се цифром завршава број: $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2014} + 2^{2015}$?

Рјешење:

$$A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2014} + 2^{2015} / \cdot 2$$

$$2A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2015} + 2^{2016}$$

$$2A - A = 2^{2016} - 1$$

$$A = 2^{2016} - 1$$

(10 бодова)

Како је 2016 дјелив са 4, а број 2 степенован са 4 се завршава цифром 6, па се и број 2^{2016} завршава цифром 6 и након одузимања броја 1 добијамо да се број

$A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2014} + 2^{2015}$ завршава цифром 5. (10 бодова)

3. У коцки сира ивице 13 dm налази се 2015 црва. Да ли се од дате коцке сира може исјећи коцка сира ивице 1 dm у којој нема ниједног црва? (Црв је краћи од 1 cm)

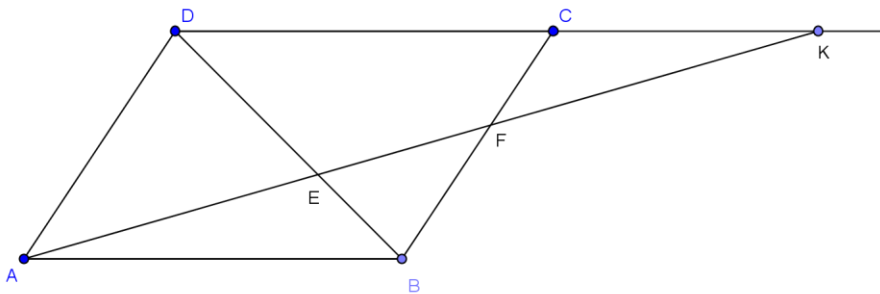
Рјешење:

Запремина коцке је $V = 13 \cdot 13 \cdot 13 = 2197\text{ dm}^3$. Како у коцки сира има 2015 црва то на основу Дирихлеовог принципа постоји бар једна коцка сира запремине 1 dm^3 унутар које се не налази ни један црв. (20 бодова)

4. Кроз тјеме A паралелограма $ABCD$ конструисана је права r која дијагоналу BD сијече у тачки E , праву CD у тачки K , а страницу BC у тачки F .

Докажи да је $AE = \sqrt{EF \cdot EK}$. (AE , EF и EK су дужине тих дужи).

Рјешење:



Како је $AB \parallel CD$, троуглови ABE и EKD су слични $\Rightarrow AE : EK = BE : DE$
 Како је $AD \parallel BF$, троуглови BEF и EDA су слични $\Rightarrow EF : AE = BE : DE$ }
 (15 бодова)
 $\Rightarrow AE : EK = EF : AE \Rightarrow AE^2 = EK \cdot EF \Rightarrow AE = \sqrt{EF \cdot EK}$. (5 бодова)

5. Да ли постоје природни бројеви p и q такви да је $p^2 - q^2 = 330$?

Рјешење:

$$(p - q) \cdot (p + q) = 2 \cdot 165$$

Бројеви p и q су или оба парна или оба непарна или један паран један непаран. У сваком од ових случајева збир и разлика тих бројева је исте парности што значи да су бројеви $p - q$ и $p + q$ или оба парна или оба непарна. Како је њихов производ 330 паран број, то значи да морају бити оба парна. Али, ако су оба парна, онда је њихов производ дјeljив са 4, а 330 није дјeljив са 4. Према томе, такви бројеви не постоје. (20 бодова)